Cadre : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Généralités

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est symétrique lorsque ${}^{\mathrm{t}}A = A$. On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 2. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est hermitienne lorsque $A^\star = {}^{\mathrm{t}}\overline{A} = A$. On note $H_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in H_2(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$

Définition 4. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est orthogonale lorsque ${}^{\mathrm{t}}AA = I_n$. On note $O_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 5. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est unitaire lorsque $A^\star A = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}A = I_n$. On note $U_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unitaires à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 6. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est définie positive lorsque ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Définition 7. $A \in M_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique lorsque ${}^{\mathrm{t}}A = -A$. On note $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 8. *Si* $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$*, alors* $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ *et* $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$.

Remarque 9. *La famille* $((E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n})$ *est une base de* $S_n(\mathbb{K})$*. La famille* $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ *est une base de* $A_n(\mathbb{K})$.

Remarque 10. $H_n(\mathbb{C})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* n^2*, mais ce n'est pas un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

Exemple 11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Lien avec les formes bilinéaires symétriques

Définition 12. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$. ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E lorsque $x \mapsto \phi(x,y)$ et $y \mapsto \phi(x,y)$ sont linéaires et, pour tous $x, y \in E$ on a $\phi(x,y) = \phi(y,x)$.

Définition 13. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$. ϕ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E lorsque $x \mapsto \phi(x,y)$ est linéaire, $y \mapsto \phi(x,y)$ est antilinéaire et que, pour tous $x, y \in E$ on a $\phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$.

Exemple 14. *La forme suivante est sesquilinéaire hermitienne :*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}))^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt \end{array}$$

Proposition 15. *Supposons* E *de dimension finie. Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E*. On note* $M = (\phi(e_i,e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$*, où* $\phi : E \times E \to \mathbb{K}$ *est bilinéaire ou sesquilinéaire.* M *est appelée matrice le* ϕ *dans la base* $\mathcal{B}$*. De plus,* ϕ *est symétrique si, et seulement si,* M *est symétrique, et* ϕ *est hermitienne si, et seulement si,* M *est hermitienne.*

3) Endomorphismes adjoints

Définition 16. Une forme bilinéaire symétrique définie positif sur E est appelée produit scalaire. Une forme sesquilinéaire hermitienne définie positif sur E est appelée produit hermitien.

Exemple 17. *La forme suivante est un produit scalaire :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Définition 18. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est euclidien s'il est de dimension finie et s'il est muni d'un produit scalaire, noté $\langle .,. \rangle$. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est hermitien s'il est de dimension finie et s'il est muni d'un produit hermitien, noté $\langle .,. \rangle$.

Définition 19. Soit E un espace euclidien ou hermitien, et soient $f, g \in L(E)$. f et g sont dits adjoints lorsque :

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

Pour $f \in L(E)$ donné, il existe au plus un endomorphisme adjoint à f, qu'on appelle adjoint de f, et qu'on note $f^\star$. Lorsque $f = f^\star$, on dit que f est autoadjoint.

Proposition 20. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $f \in L(E)$. Alors $f^\star$ existe et $Mat_{\mathcal{B}}(f^\star) = Mat_{\mathcal{B}}(f)^\star$.*

Proposition 21. *Soient E un espace euclidien. Alors $f \in L(E)$ est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice est symétrique.*

Proposition 22. *Soient E un espace hermitien. Alors $f \in L(E)$ est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice est hermitienne.*

Exemple 23.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x+3y}{2x+8y} \end{array} \right. \Rightarrow f^\star : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{x+2y}{3x+8y} \end{array} \right.$$

II Propriétés des matrices symétriques et hermitiennes

1) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Proposition 24. *Soient E un espace euclidien ou hermitien, et f un endomorphisme autoadjoint. Si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.*

Théorème 25. *Soient E un espace euclidien ou hermitien, et f un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée de vecteur propre pour f, les valeurs propres de f étant réelles.*

Corollaire 26. *Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $C \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tCMC$ est diagonale réelle.*

Corollaire 27. *Soit $M \in H_n(\mathbb{C})$, alors il existe une matrice $U \in U_n(\mathbb{R})$ telle que $U^\star MU$ est diagonale réelle.*

Exemple 28. *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, alors $U^\star AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

Contre-exemple 29. *$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.*

Corollaire 30.
- *Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+\star}$*
- *Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, $M \in H_n^{++}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^{+\star}$*

Proposition 31. *Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $M_k = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in S_k(\mathbb{R})$. M est définie positive si, et seulement si, $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\det(M_k) > 0$.*

Corollaire 32. *Soient $M, N \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$), telles que la matrice M soit définie positive. Alors il existe une matrice C inversible telle que $C^\star MC = I_n$ et $C^\star NC$ est diagonale réelle.*

Lemme 33. *Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives, et $\alpha, \beta \geqslant 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, alors :*

$$\det(\alpha A + \beta B) > \det(A)^\alpha \det(B)^\beta$$

Application 34 (Ellipsoïde de John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un unique ellipsoïde de centre 0 et de volume minimal contenant K.*

2) Décomposition polaire

Lemme 35. *Si deux matrices sont diagonalisables et commutent, alors elles sont diagonalisables dans une même base.*

Théorème 36 (Décomposition polaire)**.** *On a les homéomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & OS \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U_n(\mathbb{R}) \times H_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (U,H) & \mapsto & UH \end{array}$$

Corollaire 37. *Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2^2 = \rho({}^tAA)$.*

Lemme 38. *Pour tout $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $\|M\|_2 = \rho(M)$.*

Théorème 39. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Corollaire 40. *$GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$*

III Application à l'optimisation

1) Résolution de systèmes linéaires

Théorème 41. *Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Posons :*

$$J : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle + c \end{array} \right.$$

Minimiser J sur $\mathbb{R}^n$ revient à résoudre le système linéaire $AX = b$.

Théorème 42 (Décomposition de Choleski)**.** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.*

2) Algorithmes

Théorème 43 (Méthode du gradient à pas variable)**.** *On reprend la fonctionnelle quadratique J définie précédemment. Soit $(\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On considère la suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{cases} u^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ u^{k+1} = u^k - \rho^k \nabla J(u^k) \end{cases}$$

On note λ_1 et λ_n respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A. La suite $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u^\star \in \mathbb{R}^n$ réalisant le minimum de J si $0 < \rho^k < \frac{2}{\lambda_n}$, le meilleur choix étant $\rho^k = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$.

Théorème 44 (Méthode du gradient à pas optimal)**.** *Soit J une fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère les suites $(\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$\begin{cases} u^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ \rho^k \text{ minimise } \rho \mapsto J\left(u^k - \rho \nabla J(u^k)\right) \\ u^{k+1} = u^k - \rho^k \nabla J(u^k) \end{cases}$$

Dans le cas de la fonctionnelle quadratique, cet algorithme converge vers $u^\star \in \mathbb{R}^n$ réalisant le minimum de J si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\rho^k = \frac{\left\|\nabla J(u^k)\right\|^2}{\langle A \nabla J(u^k), \nabla J(u^k)\rangle}$$

Développements

- Décomposition polaire (36,37) [CG13]
- Ellipsoïde de John-Loewner (33,34) [FGN13c]
- Un homéomorphisme induit par l'exponentielle (38,39,40) [CG13]

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition, 1994

[CG13] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet, 2013

[Cia88] Philippe Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation.* Masson, 1988

[FGN13c] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 3.* Cassini, 2013